

# Identificación Ciega de Sistemas SIMO con Señal de Entrada Dispersa

David Luengo, Ignacio Santamaría, Luis Vielva, Jesús Ibáñez, Carlos Pantaleón  
Grupo de Tratamiento Avanzado de Señal, Departamento de Ingeniería de Comunicaciones (DICOM)  
Universidad de Cantabria  
e-mail: david@gtas.dicom.unican.es

**Abstract**— We consider the blind identification of FIR channels with a single input and multiple outputs when the input signal is sparse. The problem is equivalent to identifying the mixing matrix for underdetermined blind source separation, but with temporal correlation among the sources. The length of each channel is assumed known, or previously estimated. Exploiting the sparse character of the input signal, the algorithm solves sequentially the three identification problems: estimating the directions of each column of the channel matrix; estimating their  $L_2$ -norm; and finding the most likely order of the columns. The performance of the algorithm in additive noise and its computational cost are compared against subspace-based techniques.

## I. INTRODUCCIÓN

La identificación ciega de canal es un problema importante y ampliamente estudiado que aparece en numerosas aplicaciones de procesamiento de señal: igualación en comunicaciones digitales [1], deconvolución de datos sísmicos [2], codificación de voz [3], restauración de imágenes [4], evaluación no destructiva de materiales [5], etc. En este artículo consideramos sistemas SIMO: sistemas con una única señal de entrada y múltiples señales de salida (observaciones). El sistema puede construirse sobremuestreando una única señal de salida, o a partir de varias medidas. En estas condiciones, si la respuesta del canal para cada salida tiene soporte finito (canales FIR), los canales no tienen ceros en común, y la señal de entrada excita todos los canales, el sistema se puede identificar usando únicamente estadísticos de segundo orden de la salida mediante el algoritmo TXK [6]. Esta idea inicial se ha extendido utilizando, entre otras, técnicas basadas en la separación de los espacios de señal y ruido mediante la descomposición en valores propios (SSM) [7]. El principal inconveniente de ambos algoritmos es su elevado coste computacional. En muchas aplicaciones, como la deconvolución sísmica o la evaluación no destructiva de materiales, son necesarios algoritmos rápidos y de reducido coste computacional que permitan aprovechar la gran cantidad de datos disponibles. En este artículo se presenta una extensión del algoritmo propuesto en [8] para el caso de señales contaminadas por ruido.

### A. Modelo Matemático

Consideramos que en cada instante disponemos de  $m$  observaciones, correspondientes a  $m$  canales de longitud máxima  $q$ . El problema se puede formular matricialmente como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{W} = \mathbf{X} + \mathbf{W}; \quad (1)$$

siendo  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(N)]$  una matriz  $m \times N$ , formada agrupando  $N$  observaciones consecutivas  $\mathbf{y}(n) = [y_1(n), \dots, y_m(n)]^T$ ;  $\mathbf{H} = [\mathbf{h}(0), \dots, \mathbf{h}(q-1)]$  es la matriz del canal, de dimensión  $m \times q$ , con  $\mathbf{h}(k) = [h_1(k), \dots, h_m(k)]^T$ ;  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(1), \dots, \mathbf{s}(N)]$  una matriz  $q \times N$  con las señales de entrada  $\mathbf{s}(n) = [s(n), \dots, s(n-q+1)]^T$ ;  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}(1), \dots, \mathbf{w}(N)]$  es una matriz de ruido aditivo blanco Gaussiano (AWGN), cuyas componentes son independientes entre sí, con  $\mathbf{w}(n) = [w_1(n), \dots, w_m(n)]^T$ , y siendo  $w_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{w_i})$ ; y  $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{S} = [\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N)]$  es la matriz de observaciones en ausencia de ruido, con  $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), \dots, x_m(n)]^T$ .

El modelo matemático dado por (1) es equivalente al de la separación ciega de fuentes en el caso de mezcla lineal instantánea [9]. Para este modelo existen tres posibilidades. Si disponemos de más observaciones que fuentes ( $m > q$ ) el sistema está sobredeterminado, si disponemos de las mismas observaciones que fuentes ( $m = q$ ) el sistema es determinado, y si el número de fuentes es mayor que el de observaciones ( $m < q$ ) el sistema se encuentra indeterminado. Puesto que generalmente la longitud de cada canal FIR es mayor que el número total de observaciones, habitualmente disponemos de sistemas indeterminados. La principal diferencia en este caso con respecto a la separación ciega de fuentes es la correlación temporal entre las señales de entrada.

### B. FDP de la Señal de Entrada

El vector de observaciones en un determinado instante se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{k=0}^{q-1} \mathbf{h}(k)s(n-k). \quad (2)$$

En este artículo consideramos que las señales de entrada son dispersas. Si en un determinado instante sólo una de las señales de entrada está activa, el vector de observación es colineal con la correspondiente columna de  $\mathbf{H}$ . En el caso de la separación ciega de fuentes, diversos artículos han demostrado que se puede resolver el problema utilizando algoritmos sencillos cuando las fuentes son dispersas [9], [10]. La idea general de estas técnicas es explotar la agrupación de las observaciones alrededor de las direcciones de las columnas de  $\mathbf{H}$ . En la fig. 1 se muestra un ejemplo sin ruido para  $N = 10000$ ,  $m = 2$ ,  $n = 3$ ,  $\mathbf{H}$  dada por (14), y un factor de dispersión  $p = 0.6$ ,

que indica la probabilidad de que una muestra de entrada esté inactiva. Se observa que las muestras se alinean a lo largo las direcciones correspondientes a las tres columnas de  $\mathbf{H}$ .

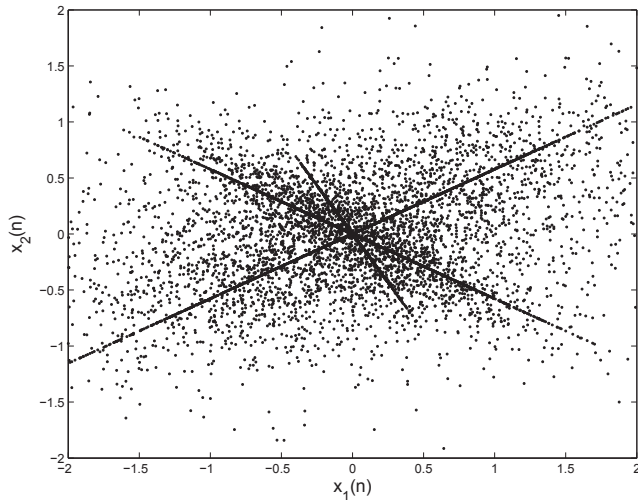


Fig. 1. Diagrama de Scattering para 2 canales y 3 fuentes.

Aunque el rendimiento de estos algoritmos disminuye notablemente cuando las fuentes no son dispersas, en [10] se ha mostrado que muchas señales se pueden convertir en dispersas mediante la transformación adecuada. Como fdp de la señal de entrada consideramos una distribución Bernoulli-Gaussiana, utilizada frecuentemente en evaluación no destructiva y deconvolución sísmica [2]:

$$f_S(s) = p\delta(s) + (1-p) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right). \quad (3)$$

### C. Parametrización de la Matriz del Canal

Antes de implementar el algoritmo es necesario parametrizar convenientemente la matriz del canal. Consideramos cada columna de  $\mathbf{H}$  como un vector en un espacio  $m$ -dimensional, y la representamos en coordenadas esféricas. En este artículo consideramos únicamente el caso de  $m = 2$  canales, puesto que permite visualizar mejor el algoritmo, aunque todos los resultados obtenidos son extensibles a un número arbitrario de canales. En este caso, la matriz del canal se puede expresar como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{h}(0)\| \cos \theta_0 & \cdots & \|\mathbf{h}(q-1)\| \cos \theta_{q-1} \\ \|\mathbf{h}(0)\| \sin \theta_0 & \cdots & \|\mathbf{h}(q-1)\| \sin \theta_{q-1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

siendo  $\|\mathbf{h}(k)\| = \mathbf{h}(k)^T \mathbf{h}(k) = h_1^2(k) + h_2^2(k)$  la norma  $L_2$  de cada columna, y  $\theta_k = \arctan(x_2/x_1)$  el ángulo de cada columna ( $k = 0, \dots, q-1$ ).

A partir de (4), y supuesta conocida la longitud de cada canal, las tres etapas necesarias para identificar  $\mathbf{H}$  son: identificar los ángulos de cada columna de la matriz del canal, estimar sus normas, y ordenar las columnas de la matriz obtenida. En el caso de la separación ciega de fuentes únicamente es necesario el primer paso, puesto que cualquier factor de escala y permutación de las columnas de  $\mathbf{H}$  es admisible. En este

artículo se estudia el funcionamiento del algoritmo en ruido, se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud (ML) de las fases, las normas y el orden de las columnas, y se comparan con el caso sin ruido estudiado en [8].

### D. FDP de las Observaciones

El algoritmo se basa en explotar el hecho de que frecuentemente sólo una muestra de entrada se encuentra activa. En este caso, la fdp de las observaciones es una Gaussiana bidimensional. Considerando idéntica varianza de ruido  $\sigma_w^2$  para todas las observaciones, y en el caso de que únicamente sea distinta de cero la muestra  $n = k$ , la fdp de  $\mathbf{y}(n)$  es

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}(n)) = \frac{1}{2\pi|\mathbf{C}_y|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{y}(n)^T \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{y}(n)\right), \quad (5)$$

siendo  $\mathbf{C}_y = \sigma_s^2 \mathbf{h}(k) \mathbf{h}(k)^T + \sigma_w^2 \mathbf{I}$  la matriz de correlación de las observaciones. Si existen  $N_k$  muestras colineales con la columna  $k$ -ésima, la fdp global es su producto. Manipulando esta expresión, poniéndola en función del módulo y fase de la columna  $k$ -ésima, y tomando el logaritmo, obtenemos la función de log-verosimilitud

$$\begin{aligned} \ln f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= -\frac{N_k}{2} \ln(\|\mathbf{h}(k)\|^2 \sigma_s^2 + \sigma_w^2) \\ &\quad + \frac{\sigma_s^2 \|\mathbf{h}(k)\|^2}{2\sigma_w^2 (\|\mathbf{h}(k)\|^2 \sigma_s^2 + \sigma_w^2)} \\ &\quad \sum_{n=1}^{N_k} (\cos \theta_k y_1(n) + \sin \theta_k y_2(n))^2, \end{aligned} \quad (6)$$

donde se han eliminado los términos constantes que no dependen del módulo o la fase.

## II. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

### A. Identificación de los Ángulos

El primer paso es identificar la dirección de cada columna de la matriz del canal, esto es, su ángulo. Para ello se construye un histograma como el de la fig. 2 obtenido para  $N = 10000$ , SNR=10 dB, y  $\mathbf{H}$  dada por (14), con los ángulos de cada vector de observación. El ruido y la coexistencia de varias muestras activas en la entrada provocan la dispersión de las observaciones alrededor de los ángulos reales, y en consecuencia la aparición de numerosos máximos locales. También se observa cómo el ruido provoca una dispersión mucho mayor en el ángulo correspondiente a la columna de  $\mathbf{H}$  de menor amplitud. Para paliar este efecto nos aseguramos de que cada pico obtenido es el máximo en un entorno de  $\pm b$  muestras del histograma (en este caso  $b = 2$ ), descartándolo en caso contrario.

Derivando (6) con respecto a las fases e igualando a cero obtenemos el estimador ML de las mismas

$$\hat{\theta}_k = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_2}\right), \quad (7)$$

donde  $\mathbf{y}_1$  e  $\mathbf{y}_2$  son los vectores con las  $N_k$  observaciones colineales con el ángulo  $k$ -ésimo, esto es, las observaciones que se encuentran dentro de la muestra del histograma seleccionada. Esta fórmula es diferente a la usada en [8], donde

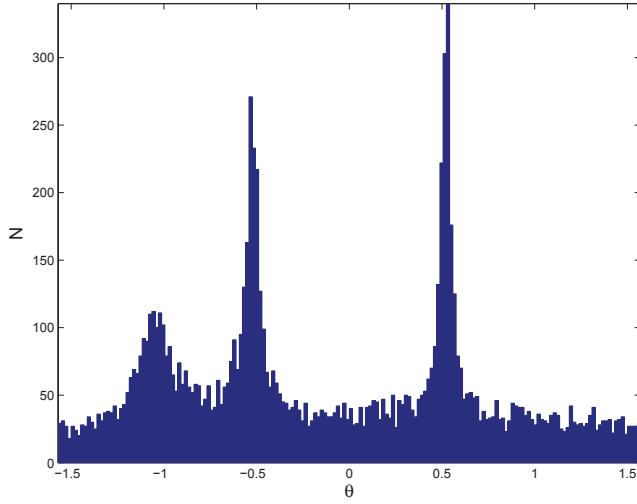


Fig. 2. Histograma de los ángulos para una SNR=10 dB.

simplemente se realizaba un promedio entre todos los ángulos. En este caso se calcula el ángulo del promedio, lo que reduce el efecto del ruido, y resulta en una mejor estima del mismo. En cualquier caso, (7) tiende a proporcionar el mismo resultado que  $\arctan(y_2/y_1)$  a medida que  $\sigma_w^2 \rightarrow 0$ .

#### B. Estimación de las Amplitudes

Con la identificación de los ángulos quedaría resuelto el problema de la identificación de la matriz del canal para la separación ciega de fuentes. Sin embargo, en el caso de la identificación ciega es necesario estimar las normas de cada columna de la matriz. Al igual que en el caso de las fases, derivando (6) con respecto a las normas e igualando a cero obtenemos su estimador ML

$$\|\hat{\mathbf{h}}(k)\| = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v} - N_k \sigma_w^2}{N_k \sigma_s^2}}, \quad (8)$$

siendo

$$\mathbf{v} = (\cos \theta_k \mathbf{y}_1 + \sin \theta_k \mathbf{y}_2), \quad (9)$$

y la varianza de ruido  $\sigma_w^2$  se estima durante los periodos de ausencia de señal. En el caso de que no exista ruido, (8) se puede expresar en función de uno de los dos vectores de observación sin ruido,  $\mathbf{x}_1$  o  $\mathbf{x}_2$ , ya que sólo existe un factor de escala entre ambos

$$\|\hat{\mathbf{h}}(k)\| = \sqrt{\frac{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1}{N_k \cos^2 \theta_k}} = \sqrt{\frac{\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2}{N_k \sin^2 \theta_k}}. \quad (10)$$

Estas expresiones son las que se obtuvieron en [8]. Si se conociera el ángulo de manera exacta, ambas estimas serían idénticas. Sin embargo, puesto que existe un cierto error en la estima del ángulo, es preferible estimar la norma como

$$\|\mathbf{h}(k)\| = \sqrt{\frac{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2}{N_k}}. \quad (11)$$

En cualquier caso, (8) es válida también para el caso sin ruido, y es la que utilizamos en las simulaciones.

#### C. Ordenación de las columnas

Hasta el momento hemos identificado la matriz del canal con una ambigüedad en la norma global, y una permutación en las columnas de  $\mathbf{H}$ . El factor de escala global es aceptable, pero no la permutación de las columnas. Esta permutación se puede eliminar gracias a la correlación temporal existente entre vectores de entrada consecutivos. Consideremos  $q$  observaciones consecutivas que son colineales con las columnas de  $\mathbf{H}$  ordenadamente. Su fdp viene dada por

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{mq/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}\right), \quad (12)$$

con  $\mathbf{R} = \sigma_s^2 \mathbf{h} \mathbf{h}^T + \sigma_w^2 \mathbf{I}$ , y  $\mathbf{h} = [h_1(0), h_2(0), \dots, h_1(q-1), h_2(q-1)]^T$ , e  $\mathbf{y} = [y_1(n), y_2(n), \dots, y_1(n+q-1), y_2(n+q-1)]^T$  suponiendo que en el instante  $n$  el vector de observaciones es colineal con la primera columna de  $\mathbf{H}$ . Y, si disponemos de  $N_{cl}$  muestras colineales consecutivamente con  $q$  columnas de  $\mathbf{H}$ , su fdp es el producto. El estimador ML del orden de las columnas de  $\mathbf{H}$  es aquel que maximice el producto de las fdp. Puesto que únicamente realizamos permutaciones de  $\mathbf{H}$ , el módulo del determinante permanece constante, y la función de log-verosimilitud, eliminando términos constantes, resulta

$$\ln f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{cl}} \mathbf{y}_i^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_i. \quad (13)$$

La ordenación ML de las columnas es aquella de entre las  $q!$  permutaciones que maximice (13), esto es, la que minimice el sumatorio. El problema de esta aproximación es que el número de permutaciones crece muy rápidamente a medida que aumenta  $q$ . Además, en el caso de no existir ruido, o muy poco ruido, la matriz  $\mathbf{R}$  está mal condicionada. En estos casos puede resultar más recomendable usar el método propuesto en [8], y fijar el orden más probable simplemente como aquel que se obtiene en un mayor número de ocasiones.

### III. SIMULACIONES

Para validar el funcionamiento del algoritmo en ruido hemos considerado el siguiente canal:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & 0.3 \cos(5\pi/3) & 0.7 \cos(-\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & 0.3 \sin(5\pi/3) & 0.7 \sin(-\pi/6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8660 & 0.1500 & 0.6062 \\ 0.5000 & -0.2598 & 0.3500 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Realizamos un análisis de Monte Carlo para factores de dispersión entre 0.5 y 0.95, y SNRs entre 10 y 50 dB, con un número de muestras entre 1000 y 5000. Como figura de mérito del algoritmo se utiliza el MSE normalizado de la estimación, definido como

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{i=1}^q \|\mathbf{h}(k) - \hat{\mathbf{h}}(k)\|^2}{\sum_{i=1}^q \|\mathbf{h}(k)\|^2}. \quad (15)$$

Para cada factor de dispersión, SNR, y longitud del registro, se calcula el MSE promediando 2000 simulaciones independientes. Los resultados se muestran en las figs. 3 y 4. En la

fig. 3 se puede observar cómo el MSE en función del factor de dispersión es similar al obtenido en [8] para el caso sin ruido. Las principales diferencias son que el MSE no decrece tan rápidamente al aumentar el factor de dispersión, y que el mínimo parece encontrarse en  $p = 0.8$  en lugar de en  $p = 0.75$ . Al igual que en el caso sin ruido, para  $p > 0.8$  el MSE aumenta debido a la escasez de muestras disponibles para realizar la estimación de las amplitudes. En la fig. 4 se muestra como el MSE disminuye en función de la SNR, hasta alcanzar un valor de saturación para SNRs superiores a 25 dB, que depende del número de muestras disponibles.

Obviamente, como se aprecia en la fig. 3, el SSM proporciona mejores resultados que nuestro algoritmo. Sin embargo, necesita un coste computacional muy superior, que puede imposibilitar su uso para un número de muestras elevado. El SSM requiere una descomposición en valores propios de una matriz de autocorrelación  $mN \times mN$ , lo que implica un coste computacional  $O((mN)^3)$ . En el algoritmo propuesto, el coste computacional es debido fundamentalmente a la etapa de estimación de los ángulos, que requiere  $O((m-1)N)$  operaciones.

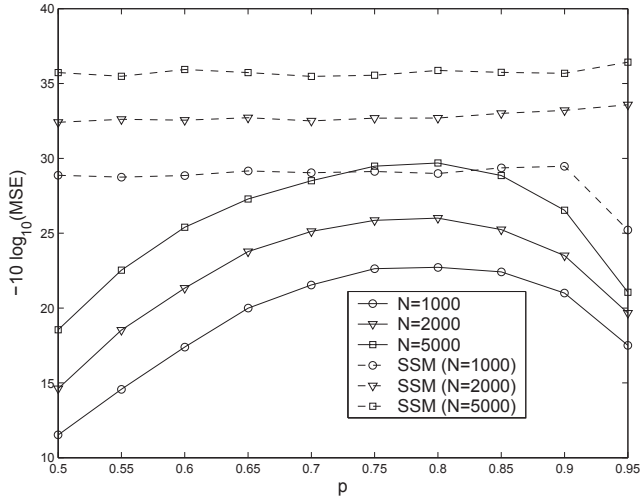


Fig. 3. MSE normalizado en función del factor de dispersión para diferentes longitudes del registro con una SNR=25 dB.

#### IV. CONCLUSIONES

En este artículo se ha mostrado un algoritmo rápido para la identificación ciega de canales SIMO con señales de entrada dispersas observadas en ruido aditivo blanco Gaussiano. El algoritmo se basa en expresar la matriz del canal en coordenadas esféricas, y aprovechar la dispersión de la señal de entrada para estimar  $\mathbf{H}$  en tres pasos: identificar los ángulos de cada columna, estimar sus amplitudes, y ordenar las columnas. Se han obtenido los estimadores ML de los ángulos y las amplitudes en ruido cuando existe únicamente una fuente activa. También se ha obtenido el estimador ML del orden de las columnas de  $\mathbf{H}$  en el caso de que las observaciones sean colineales de manera consecutiva con  $q$  columnas de  $\mathbf{H}$ . Las principales líneas de trabajo futuras consisten en extender

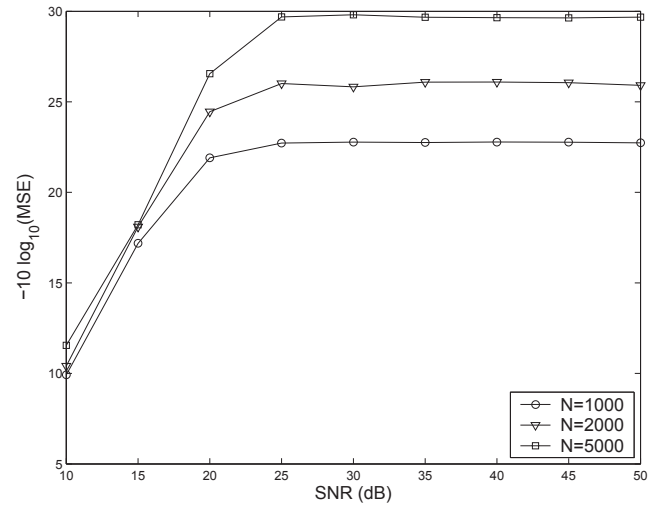


Fig. 4. MSE normalizado en función de la SNR para diferentes longitudes del registro con  $p = 0.80$ .

el algoritmo para un mayor número de canales, y comprobar su funcionamiento con señales y canales reales. En el primer apartado, la principal dificultad es la búsqueda de los picos en histogramas  $(m-1)$ -dimensionales para  $m > 2$ , resultando la estimación de las amplitudes y orden de las columnas similares al caso  $m = 2$ . En el segundo apartado, la dificultad reside en las elevadas longitudes de muchos filtros reales, que requiere el uso de largos registros de datos para su identificación.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado en parte gracias al proyecto TIC 2001-0751-C04-03 del Ministerio de Ciencia y Tecnología (MCyT).

#### REFERENCES

- [1] Zhi Ding and Ye (Geoffrey) Li, *Blind Equalization and Identification*. Marcel Dekker, 2001.
- [2] J. M. Mendel, *Maximum Likelihood Deconvolution*. Springer-Verlag, 1990.
- [3] S. Singhal and B. S. Atal, "Amplitude optimization and pitch prediction in multipulse coders," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, pp. 317–327, March 1989.
- [4] B. D. Jeffs and M. G. S. "Restoration of blurred star field images by maximally sparse optimization," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 2, pp. 202–211, Apr. 1993.
- [5] S. K. Sin and C. H. Sen, "A comparison of deconvolution techniques for the ultrasonic nondestructive evaluation of materials," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 1, pp. 3–10, Jan. 1992.
- [6] L. Tong, G. Xu, and T. Kailath, "Blind identification and equalization of multipath channels," in *Proc. Asilomar Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp. 1964–1967, May 1995.
- [7] E. Moulines, P. Duhamel, J. F. Cardoso, and S. Mayrargue, "Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 516–525, Feb. 1995.
- [8] D. Luengo, I. Santamaría, J. Ibáñez, L. Vielva, and C. Pantaleón, "A fast blind SIMO channel identification algorithm for sparse sources," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 10, May 2003.
- [9] L. Vielva, D. Erdogmus, and J. C. Príncipe, "Underdetermined blind source separation using a probabilistic source sparsity model," in *Proc. Int. Conf. on Independent Component Analysis (ICA)*, 2001.
- [10] P. Bofill and M. Zibulevsky, "Underdetermined blind source separation using sparse representations," *Signal Processing*, vol. 81, pp. 2353–2362, Nov. 2001.